

CHLADNIHO OBRAZCE

MGR. ERIKA DUBAJOVÁ

ANOTÁCIA:

Súbor obsahuje aktivitu pre žiakov so zostrojením "meracej aparatury" z domácky dostupných predmetov a sledovanie ako rôzne frekvencie tónov vytvárajú tzv. Chladniho obrazce. Aktivita je vhodná ako pre žiakov na ZŠ, tak aj na SŠ. Aktivita je súčasťou obhájenej diplomovej práce "Matematický model vybranej skupiny hudobných nástrojov".

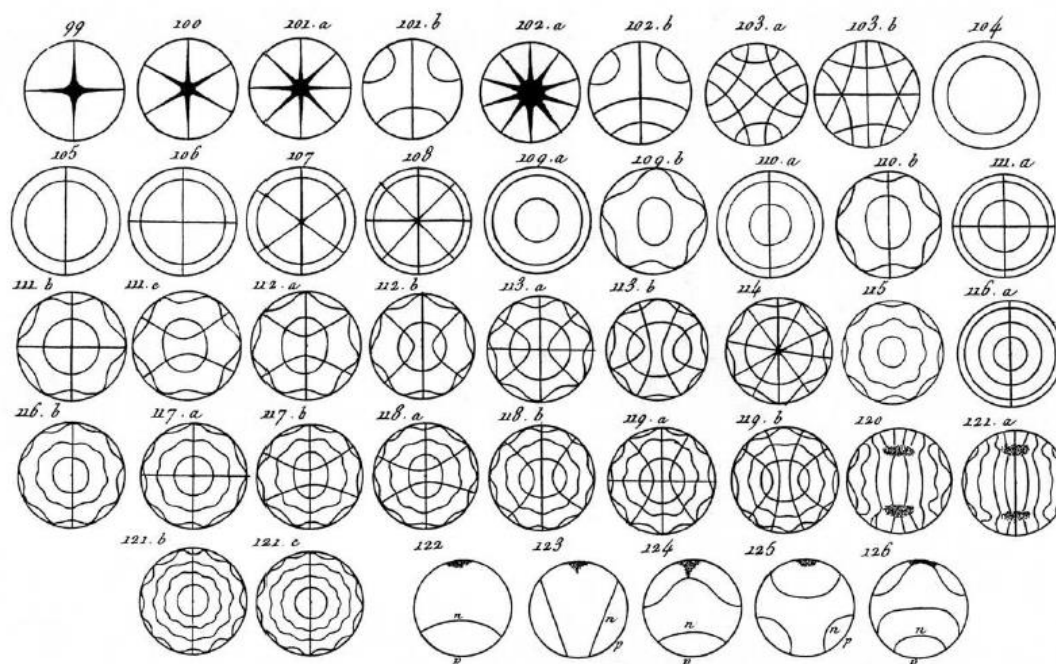
KLÚČOVÉ SLOVÁ:

Chladniho obrazce, hudba a matematika, fyzický model, záujmová aktivita

OPIS NAVRHOVANEJ VYUČOVACEJ HODINY

MOTIVÁCIA

Koncom 18. st. Ernst Chladni objavil spôsob, akým možno vidieť a zachytiť zvuk. Zaujímal ho hlavne vibrácie kovových platní, ale rovnaká technika sa dá použiť aj na bubny, či iné bicie nástroje. Metóda spočíva v nasypaní piesku na platňu, ktorú následne rozvibrujeme. Piesok sa vibráciami rozostúpi a vytvorí obrazce. V knihe, ktorú publikoval Ernst Chladni: *Discoveries in the Theory of Sound*, podrobne popisuje celý postup experimentu a všetky ním objavené obrazce.



From E. F. F. Chladni, *Traité d'acoustique*, Courcier, Paris 1809.

Obrázok 1: Chladniho náčrty (zdroj [1])

Teoreticky, Chladniho obrazce pre kruhovú kovovú platňu upevnenú po celom svojom obvode sú rovnaké ako módy rovnako upevnenej ideálnej vibrujúcej kruhovej membrány. Ale to len teoreticky.

Rozdiel medzi platňou a membránou spočíva hlavne v ich fyzikálnych vlastnostiach. Membrány bubnov sú zväčša z kože a rôznych druhov plastov, zatiaľ čo platne sú z kovu. Ich tuhosť a ohybnosť je odlišná. Platne sú menej ohybné a väčšinou hrubšie ako membrány, no napriek tomu sa nimi dokáže šíriť vlnenie.

Prakticky to však v hudobných nástrojoch funguje inak. Hlavné príčiny, kvôli ktorým dochádza k zmenám modálnych frekvencií, sú pôsobenie vzduchu, ohybová tuhosť (odpor látky voči ohýbaniu) a modul pružnosti v šmyku (pomer medzi šmykovým napätím a spôsobenou deformáciou). [2],[3]

Pri vyjadrení modálnych frekvencií sa nebrala do úvahy zotrvačnosť vzduchu. Čím je napätie membrány vyššie, tým má tlmiaca sila menší účinok. Ak však napätie nie je dostatočne vysoké, tlmiaca sila má viditeľný

účinok, hlavne pri nižších frekvenciách. Vyššie módy zapríčiňujú pohyb vzduchu zo strany na stranu a zotrvačnosť vzduchu spôsobuje rast frekvencie pre módy, kde $n = 0$. Zatiaľ čo módy pre $n > 0$ majú znížené frekvencie takým spôsobom, že sa rozšíria intervaly medzi jednotlivými módmí. [1]

Každý druh bicieho nástroja má iné vlastnosti, inak reaguje na napätie a pôsobenie vzduchu. Závisí to od tvaru tela nástroja, materiálu, ktorý bol na jeho výrobu použitý, z akého materiálu je membrána, aký tvar má membrána a iné.

V hudobných nástrojoch, ako napríklad v tympanoch, dochádza k neustálej kompresii a dekompresii vzduchu uzavretého vo vnútri tela nástroja. Tento vzduch je v špeciálnej nádobe podobnej kotlu, priamo pod membránou. Práve to spôsobuje zvýšenie frekvencie symetrických módo. Pre tieto hudobné nástroje platí, že za základný mód sa považuje $[m, n] = [1, 1]$, aby tympany lepšie ladili. [4]

Činely nie sú ukotvené na žiadne telo nástroja, čím by sa mali najviac približovať spomínaným Chladniho obrazcom. Sú to tenké, kruhové platne, s rovnomernou hustotou a napätím, no aj napriek tomu sa v niečom líšia. Činely a aj gongy nie sú totižto dokonalé kruhové platne. Keď sa na činely pozrieme z boku, uvidíme, že majú kopulovitý tvar, t.j. majú vyvýšený stred a gongy majú zase zakrivené okraje.

Pre otvorené bubny platí, že všetky ich frekvencie sú znížené pôsobením zotrvačnosti vzduchu, ale tie s najnižšou frekvenciou sú znížené najviac.

ZOSTROJENIE MODELU

Chladni použil na zobrazenie obrazcov kovových platňu ukotvenú v jej strede, slák a piesok. Slákom trel o hranu platne posypanú pieskom, dokým sa piesok neustálil a nevytvoril obraz. Vlnenie sa z miesta vzniku šíri rôznymi smermi, odráža sa od krajov a vďaka interferencii vzniká stojaté vlnenie. Zrnká piesku sa počas kmitania presunú do uzlových čiar, čiže do miest s nulovou výchylkou. Tieto obrazce boli vyobrazené na Obrázku 27. Tvar týchto obrazcov závisí od miesta upevnenia, tvaru dosky, miesta rozochvenia a podobne.

Provizórny model si môžeme zostrojiť aj doma. Nemusíme mať doma ani slák, ani kovovú dosku. Budeme potrebovať:

- **Nástroj:** ako membránu možno použiť igelitové vrece alebo potravinovú fóliu. Nám sa najviac osvedčila práve potravinová fólia, nakoľko sa s ňou dalo najlepšie pracovať a mala najmenej povrchových nedokonalostí. Túto membránu natiahneme na formu od torty, duté vedro alebo do hlbokkej sklenej misky, do ktorej pred natiahnutím fólie vložíme zdroj zvuku. Fóliu prichytíme väčšou gumičkou alebo lepiacou páskou.
- **Zdroj:** zdrojom zvuku je ideálne bezdrôtový alebo bluetooth reproduktor umiestnený pod membránou. Ak chceme vidieť konkrétne módy, tak potrebujeme k tomu generátor čistých tónov, ktorý si vieme stiahnuť alebo nájsť niekde na internete. Nakoľko čisté

tóny majú iba jednu frekvenciu, tak nie je možné aby sa zobrazil viac ako jeden mód súčasne.

- **Posyp:** povrch nástroja posypeme pieskom, krupicou alebo soľou. Pri hrubej múke, krupici či sóde bikarbóne dochádzalo pri jej opakovanom použití ku elektrizovaniu alebo prílepeniu k povrchu, čím sa obrazce skresľovali. Taktiež môžu byť jemné častice unášané vzduchom, čím sa dostanú na miesta, v ktorých by byť nemali. Čím je posyp jemnejší, prachovitejší, tým je citlivejší na zmeny vo vibráciách, avšak na druhej strane, mu trvá dlhšie ustáliť sa. Najideálnejší materiál na experiment je preto jemný piesok alebo soľ.

Po zostrojení modelu môžeme začať s experimentom. Treba však dávať pozor na hlasitosť, hlavne pri nižších frekvenciách. Čím je zvuk hlasnejší, tým spôsobuje silnejšie vibrácie, a teda väčší pohyb membrány. Treba si uvedomiť, že piesok (alebo iný posyp), bude odskakovať z povrchu nástroja a bude sa nachádzať všade naokolo. Takže netreba zabúdať na zvolenie vhodného miesta na skúšanie – ideálne bez kobercov, niekde na podlahe, stole alebo vonku. Ďalej treba dbať na to, aby bol nástroj v rovnováhe. Ak bude naklonený, obrazce budú skreslené a posyp bude inklinovať na niektorú zo strán.

Nie každej frekvencii je priradený konkrétny obraz. Chladniho obrazce sú určené iba pre konkrétne, modálne frekvencie. Ideálne je začať od najnižších frekvencií a postupne ich zvyšovať.

Pri odvádzaní hodnôt pre jednotlivé módy sa vychádzalo z predpokladov, že membrána má tvar perfektného kruhu s rovnomernou hustotou a s rovnomerným povrchovým napätím. Je pravdepodobné, že náš model nemá tieto požiadavky a tak aj obrazce môžu byť nedokonalé. Avšak aj napriek tomu by sme mali byť schopní ich rozoznať alebo aspoň povedať, ktorému vzoru sa to približuje. Modálne čiary môžu byť zakrivené a modálne kruhy môžu mať oválny tvar. Navyše, ako bolo vyššie spomínané, pôsobenie vzduchu vplýva na náš model tým, že nízke frekvencie sú tlmené, čo môže mať za následok, že nižšie módy nebudeme schopní zachytiť.

REALIZÁCIA EXPERIMENTU

Na výrobu modelu sme použili: duté vedro, potravinovú fóliu, gumičku, soľ, notebook a sadu reproduktorov. Na generovanie tónov sme použili nami vyvinutú aplikáciu a Matlab. Keďže tento softvér nie je voľno dostupný, odporúčame použiť ľubovoľný online generátor tónov.



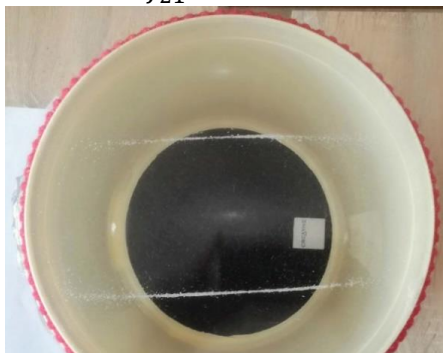
Obrázok 2: Aparát pre vykonanie experimentu

Postupovali sme nasledovne: pod model nástroja sme umiestnili reproduktory, ktoré boli zapojené do notebooku. Začínali sme na frekvencii 20 Hz, ktorú sme postupne zvyšovali. Prvý obraz sme zachytili až pri frekvencii 135 Hz. Ako bolo spomenuté, vplyvom pôsobenia vzduchu a vzhľadom na materiál membrány, dochádza k tlmeniu nižších frekvencií, kvôli čomu sme tieto modálne frekvencie neboli schopní zachytiť.



Obrázok 3: Obráz pri frekvencii 135 Hz

Tento obraz je totožný s vibračným módom $[m, n] = [2, 1]$ a teda frekvenciu 135 Hz môžeme označiť ako f_{21} . Na základe nej vieme vyjadriť hodnotu



Obrázok 4: Obráz pri frekvencii 145 Hz

základnej frekvencie $f_{01} = \frac{135}{2,1355} \cong 63,217 \text{ Hz}$. Avšak táto hodnota je iba orientačná. Keď sme chceli zobrazíť mód $[0,2]$, ktorý by mal mať tvar kruhu, na základne nami vyjadrenej frekvencie f_{01} , vyšiel výsledok $f_{02} = 63,217 * 2,2954 = 145,108 \text{ Hz}$. Lenže obraz, ktorý sme zachytili sa mu ani zďaleka nepribližoval. Obraz pripomínal dve rovnobežné čiary ako vidíme na Obrázku 30.

Postupným zvyšovaní frekvencie sa čiary začali zaobľovať. Pri frekvencii 165 Hz soľ konečne nadobudla tvar kruhu. Ak by sme z tejto hodnoty chceli vyjadriť základnú frekvenciu, dostali by sme $f_{01} = \frac{165}{2,2954} \cong 71,883 \text{ Hz}$. Z toho vyplýva, že sa týmito pomermi z Tabuľky 8 nemožno riadiť.

Môžeme si všimnúť, že po okraji vzniká druhý kruh. Tento kruh sa bude



Obrázok 5: Pohľad na model pri frekvencii 165 Hz

s rastúcou frekvenciou deformovať a približovať sa k stredu membrány, až kým nevytvorí tvar pripomínajúci kvet.



Obrázok 6: Obraz pri frekvencii 250 Hz (vľavo) a frekvencii 360 Hz (vpravo)

Niektoré tvary sa akoby opakujú, len s tým rozdielom, že sú komplikovanejšie. Akoby sa pridávala ďalšia a ďalšia vrstva. Takýmto príkladom je aj základný tvar pre ideálnu kruhovú membránu. Sú nimi

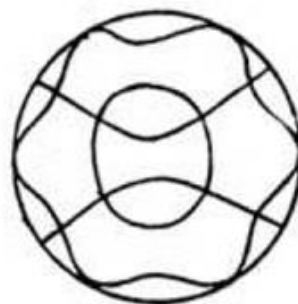
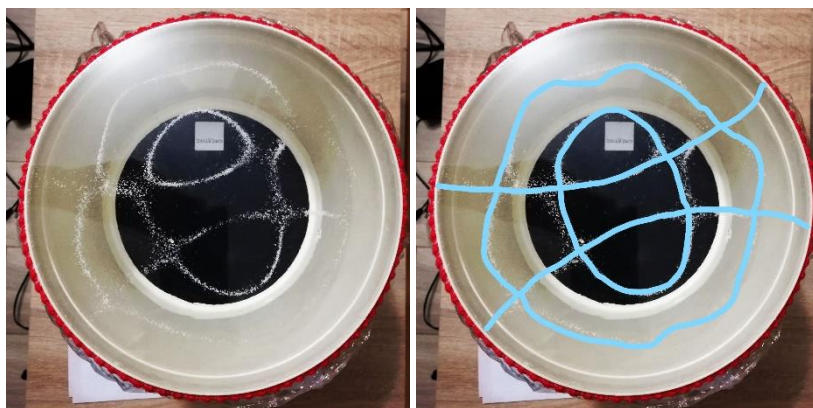
sústredné kruhy, ktorých počet narastá s rastúcou frekvenciou. Tieto kruhy sme sa pokúsili zachytiť ako vidíme na Obrázku 33.



Obrázok 7: Sústredné kruhy pri frekvenciách 330 Hz, 480 Hz, 680 Hz a 860 Hz

Väčšinu obrazov z Chladniho knihy sme nevedeli presne zachytiť, a tak sme si museli niektoré detaily domyslieť. Napríklad pri frekvencii 430 Hz sme zaznamenali tvar, ktorý nebolo možné na prvý pohľad jednoznačne priradiť. S trochou úprav to už však bolo možné.

Čím vyššiu frekvenciu sme zvolili, tým boli vzory komplikovanejšie a zároveň ťažšie identifikovateľnejšie.



Obrázok 8: Dotvorenie obrazu pri frekvencii 430 Hz

ZHRNUTIE

Pokúsili sme sa o vytvorenie Chladniho obrazcov na svojpomocne vytvorenom modeli. Z potravinovej fólie sme vytvorili membránu upevnenú po celom svojom obvode, na ktorú sme nasypali kuchynskú soľ. Cez reproduktory sme následne púšťali rôzne frekvencie a sledovali pohyb kryštálov soli. Nakoľko tieto podmienky nie sú dokonalé, nemožno rátať s tým, že sa výsledky budú zhodovať s tabuľkovými hodnotami frekvenčných módov.

Spozorovali sme, že s rastúcou frekvenciou sú obrazce komplikovanejšie, čo potvrdzujú aj Chladniho zistenia. Z teórie vieme, že nižšie frekvencie sú tlmené a je veľmi náročné ich zachytiť. Aj napriek tomu, sa nám niektoré z nich dokázalo vytvoriť.

Môžeme si všimnúť, že niektoré obrazce nie sú úplne dokonalé. Za tieto nedokonalosti môže napríklad napätie fólie – ktoré nemusí byť rovnomerné, jej tvar nemusí byť dokonalý kruh, štruktúrne nedokonalosti vo fólii, tvar vedra a iné. Každý, aj ten najmenší detail, vplýva na výsledný obraz. Pravdepodobne aj kvôli tomu sa nám niektoré typy obrazcov nepodarilo ani len náznakom zachytiť.

Pri porovnaní nami získaných tvarov s Chladniho, sme našli viacero podobností. Nie všetky z nich sa nám podarilo perfektne zachytiť, a tak nám zostávalo iba tipovať a zapojiť fantáziu. Avšak aj napriek tomu sa dá skonštatovať, že model bol dobre vytvorený, keďže väčšinu obrazcov sme dokázali priradiť ku Chladniho náčrtom.

POUŽITÁ LITERATÚRA

- [1] BENSON, D. 2008. *Music: A Mathematical Offering*. Department of Mathematics, Meston Building, University of Aberdeen, UK. 2008
- [2] ILKOVIČ, D. 1968. *Fyzika 1*. 4. vyd. Nakladateľstvo ALFA Bratislava. Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1968
- [3] ROSSING, T. D. – FLETCHER, N.H. *Principles of Vibration and Sound*. 2. vyd. Springer – Verlag New York, 2004. ISBN: 978-1-4419-2343-1
- [4] HARTMANN, W.M. *Principles of Musical Acoustics*. Michigan State University. USA. Springer Science+Business Media New York, 2013. ISBN: 978-1-4614-6785-4